Übersichtsblatt Lineare Funktionen - Klasse 8

Anacker

Die Gleichung einer Linearen Funktion besitzt die Form:

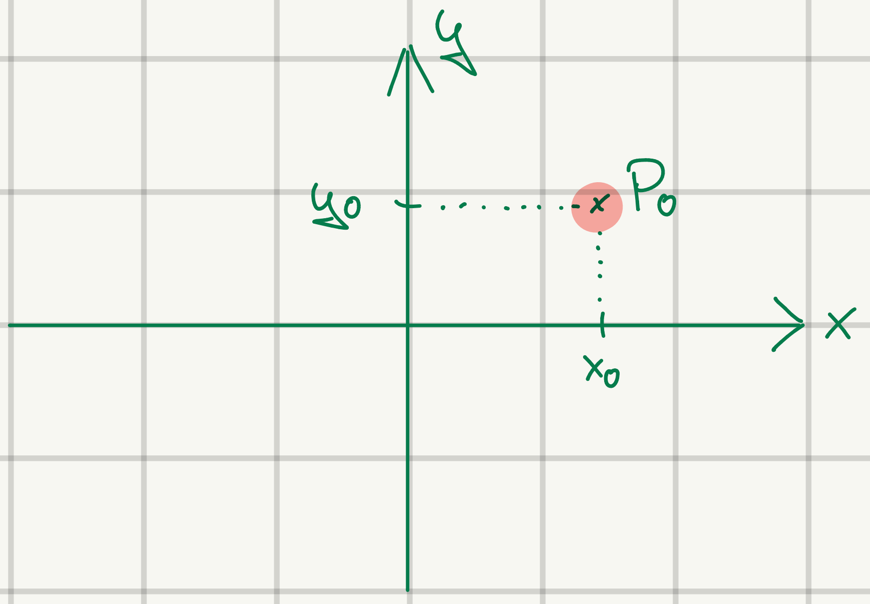
$$\boxed{y = f(x) = m \cdot x + n}$$

Wobei: m der Anstieg der Funktion
und n die Verschiebung der Funktion in Richtung der y-Achse
ist.

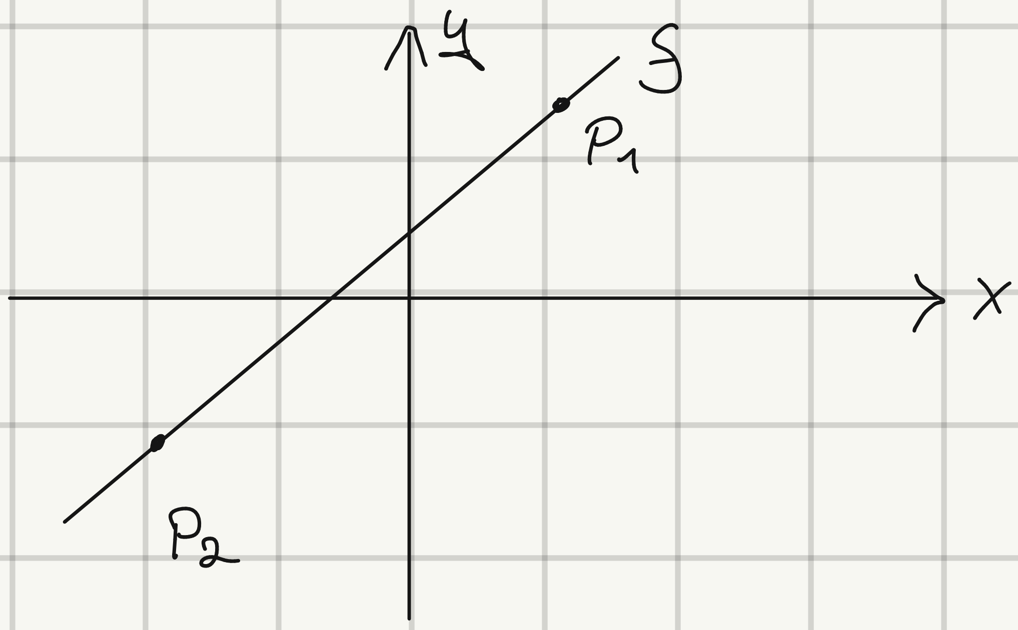
Zwei Punkte zu einer Geraden (Linearen Funktion):

Wir benötigen mindestens zwei Punkte $P_1(x_1/y_1)$ und $P_2(x_2/y_2)$, um daraus eine Lineare Funktion konstruieren zu können.

Bemerkung: Merke dir wie ein Punkt $P_0(x_0/y_0)$ aufgebaut ist:
Der erste Wert des Punktes (links) ist immer der x-Wert,
der zweite Wert (rechts) immer der y-Wert.



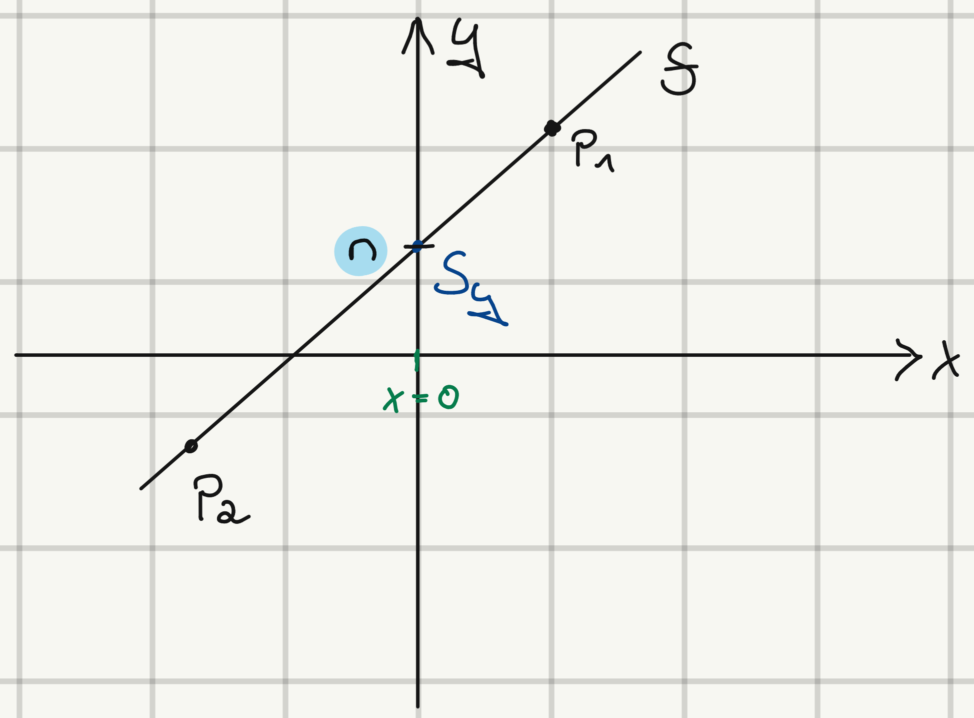
Jetzt können wir P_1 und P_2, nachdem wir sie in das Koordinatensystem eingetragen haben, mit einem Lineal verbinden und erhalten eine Gerade, die unsere Lineare Funktion f darstellt.



Zeichnerische / grafische Bestimmung der Funktionsgleichung:

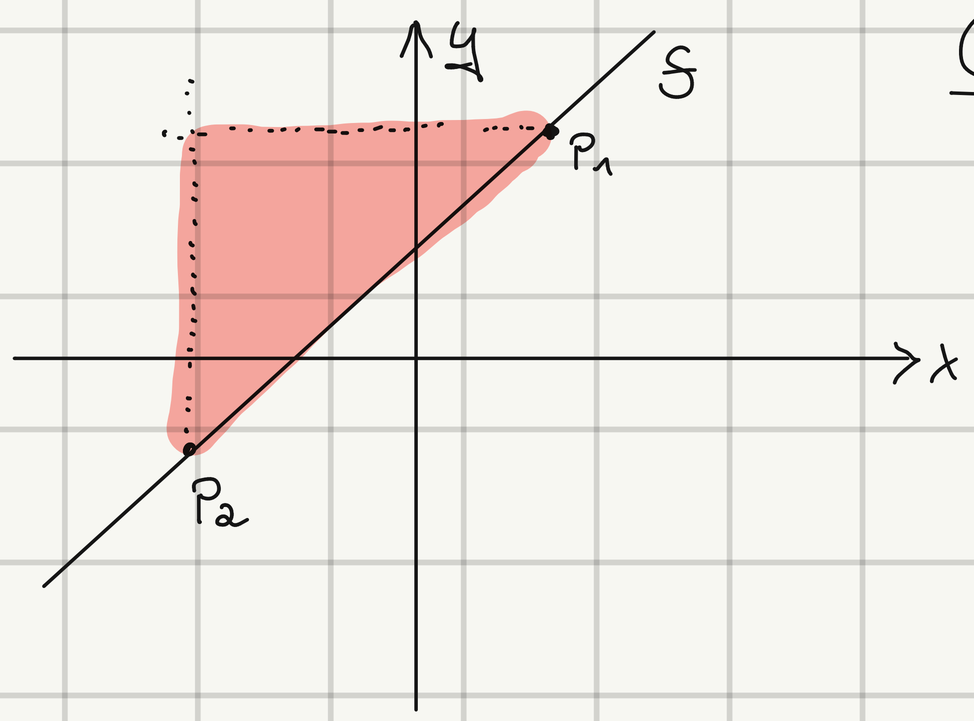
n: Die Verschiebung entlang der y-Achse n lässt sich ganz einfach aus dem Schnittpunkt mit der y-Achse $S_y(0|n)$ herauslesen:

Bemerkung: Der x-Wertes des Schnittpunktes S_y ist immer 0, da der Punkt direkt auf der vertikalen Achse liegen soll.

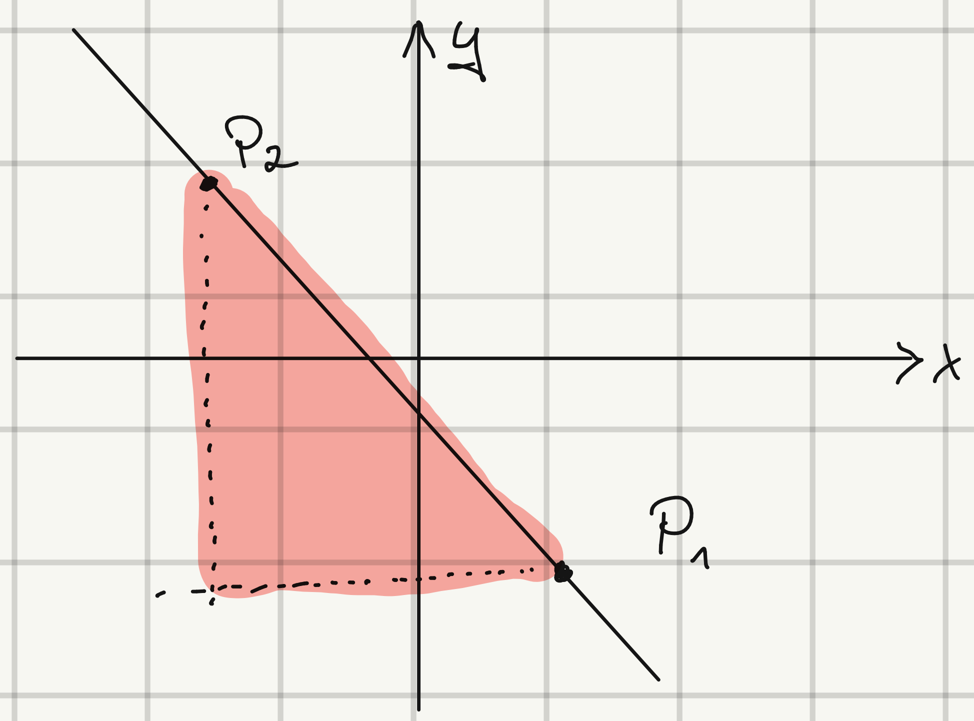


Bemerkung: Besitzt einer der Punkte P_1 oder P_2 den x-Wert 0, also $P_1(0|y_1)$, so ist dies immer gleich der Schnittpunkt mit der y-Achse S_y und n kann direkt aus dem Punkt abgelesen werden: $n = y_1$.

m: Den Anstieg m unserer Funktion können wir mit Hilfe des sogenannten Anstiegsdreiecks bestimmen:
Das Anstiegsdreieck bilden wir immer links von der Funktion mit Hilfe von zwei Punkten auf der Funktion P_1 und P_2.



ODER



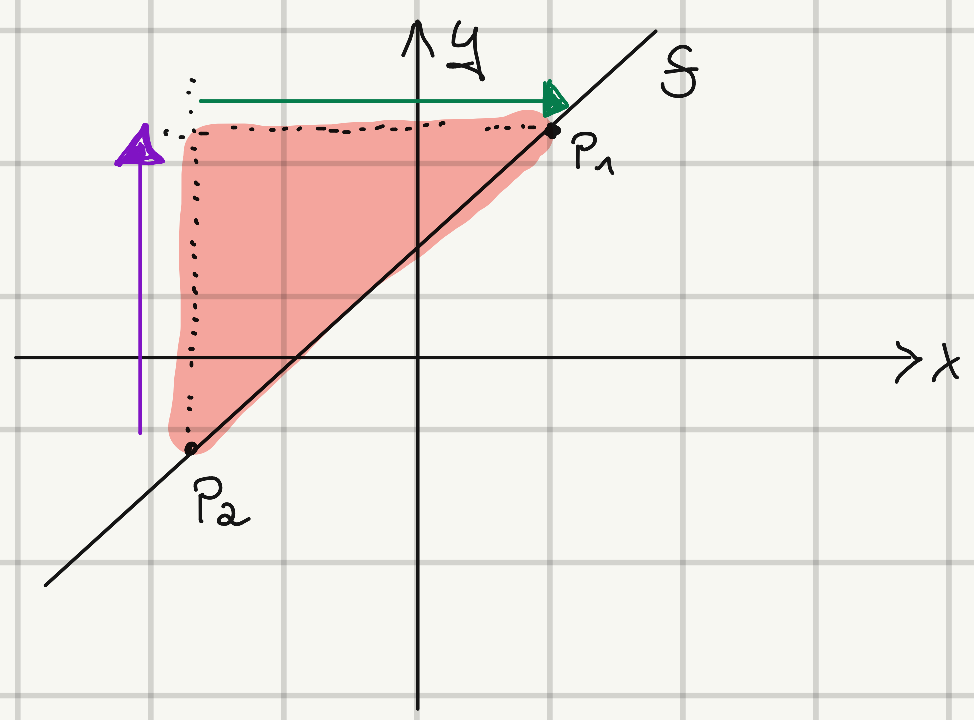
Übersichtsblatt Lineare Funktionen - Klasse 8

Anacker

Dabei gilt: Um die Punkte P_1 und P_2 mit der Funktion f zu einem Dreieck zu verbinden gehen wir entweder:

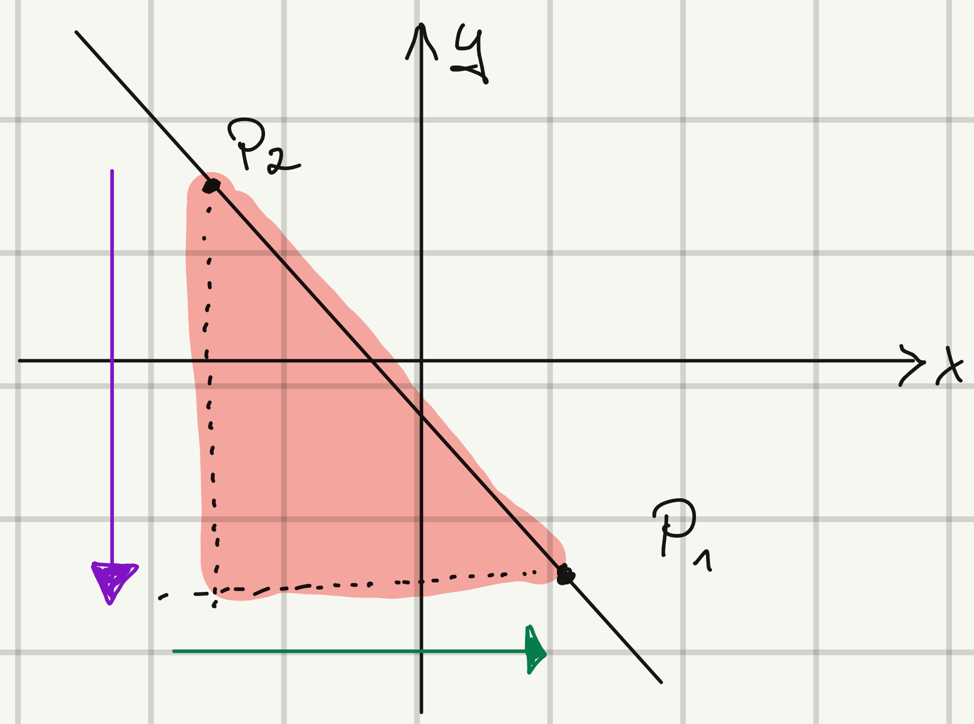
nach oben ↑ und rechts →

Dann ist m positiv.
(Das Vorzeichen von m ist „+", kann also weggelassen werden.)



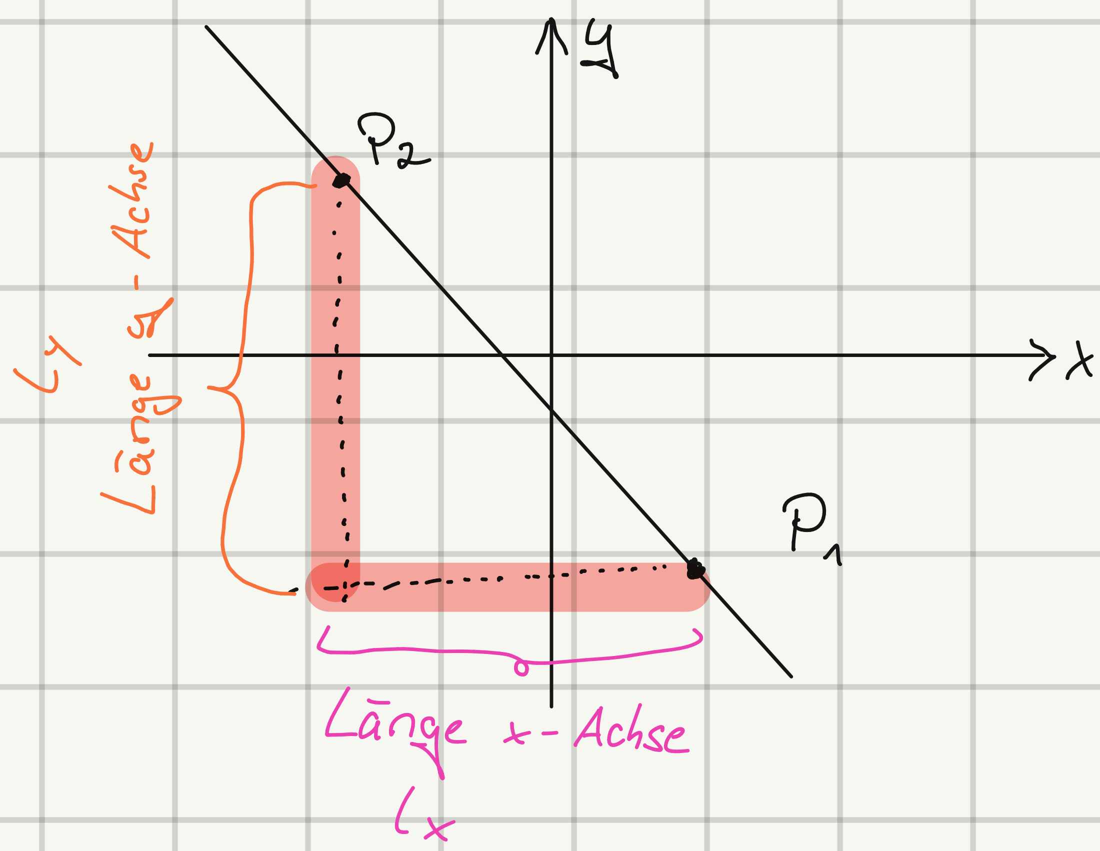
oder nach unten ↓ und rechts →

Dann ist m negativ.
(Das Vorzeichen von m ist „–")



Jetzt müssen wir nur noch den Betrag von m bestimmen:
Dazu betrachten wir die Länge der zwei Katheten unseres Anstiegsdreiecks.

Wir zählen nach rechts die Anzahl der Kästchen und bezeichnen diese als l_x. (entlang der x-Achse)
Wir zählen nach oben oder unten die Anzahl der Kästchen und bezeichnen diese als l_y. (entlang der y-Achse)



Haben wir l_x und l_y abgezählt so gilt für den Betrag von m:

$$|m| = \frac{l_y}{l_x}.$$

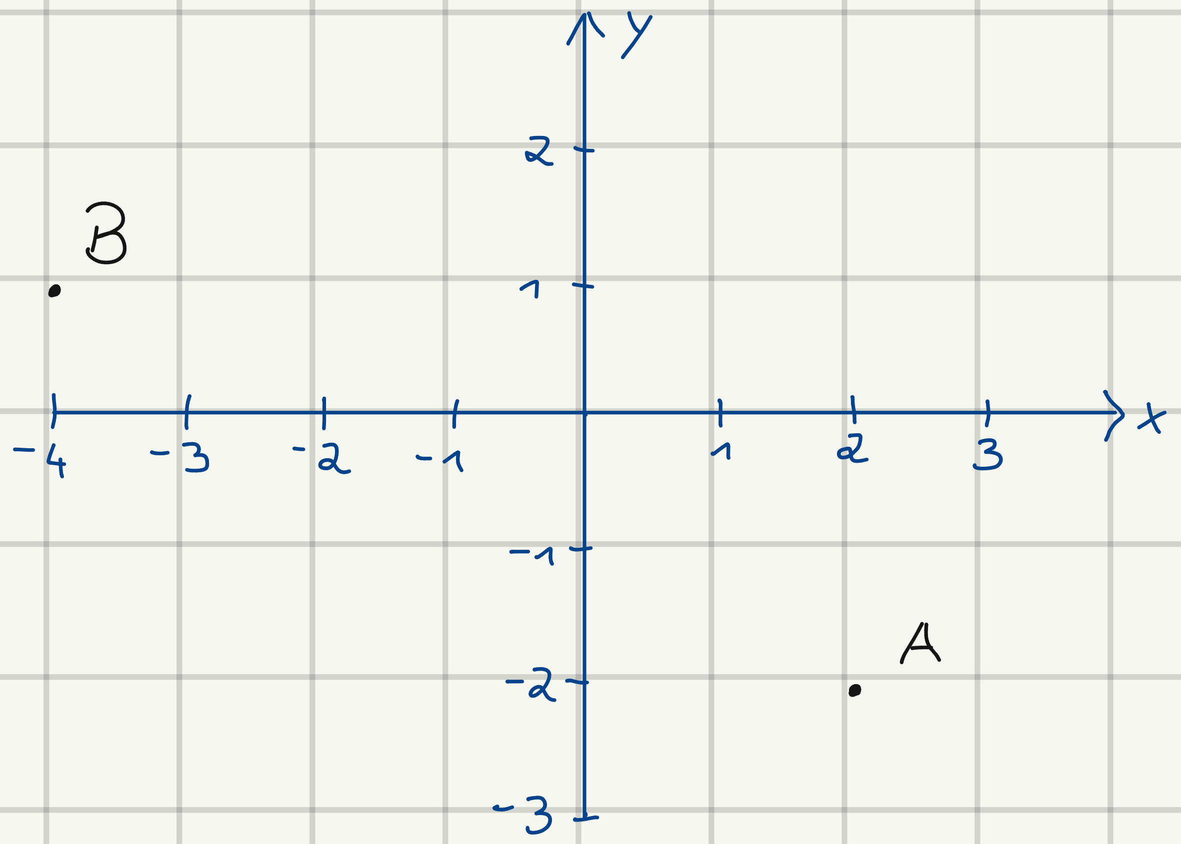
Wenn wir jetzt noch unser Vorzeichen vor $|m|$ schreiben, dann erhalten wir das gesuchte m:

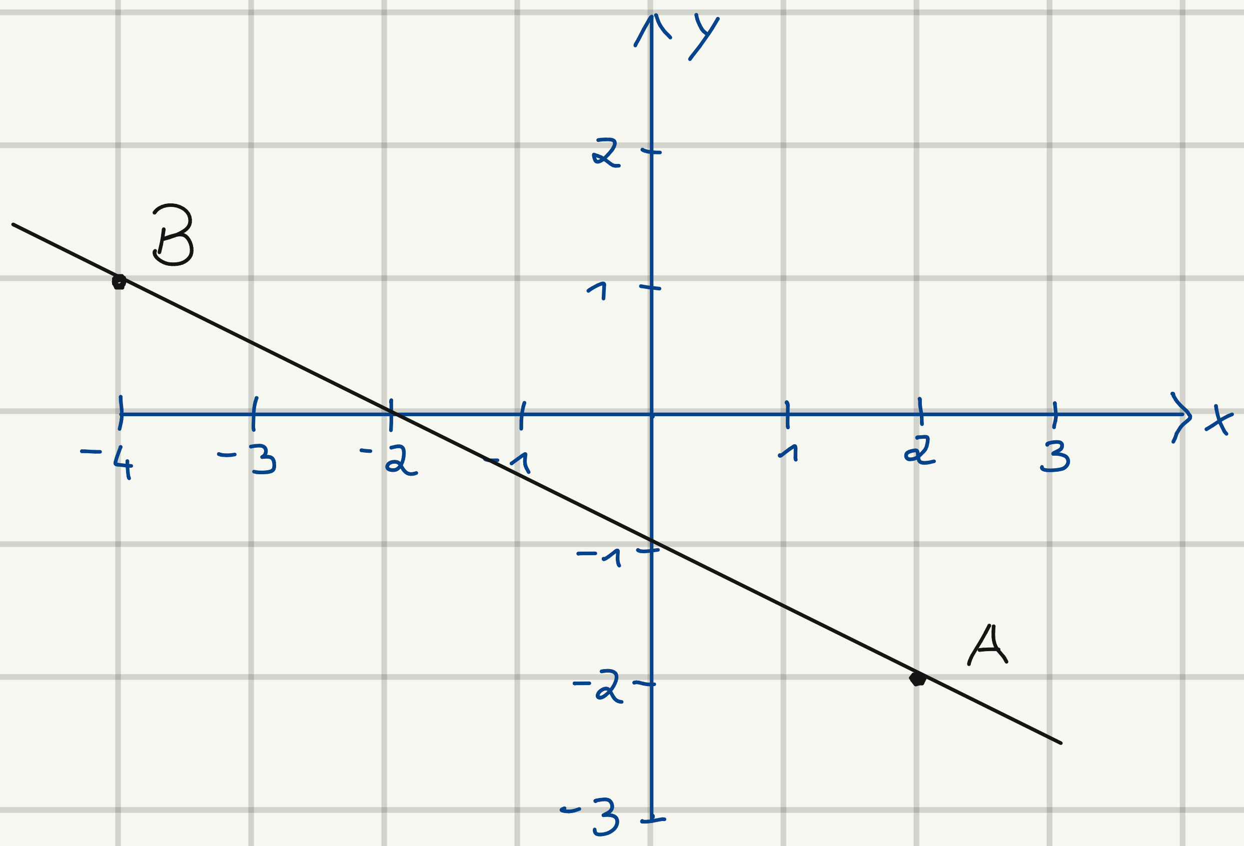
$$\boxed{m = \underset{-}{\overset{+}{\text{oder}}}\ |m| = \underset{-}{\overset{+}{\text{oder}}}\ \frac{l_y}{l_x}}$$

Beispiel für die grafische Bestimmung der Funktionsgleichung:

Gegeben sind die Punkte:
A(2 | -2)
B(-4 | 1)

Wir zeichnen die Punkte in ein geeignetes Koordinatensystem.

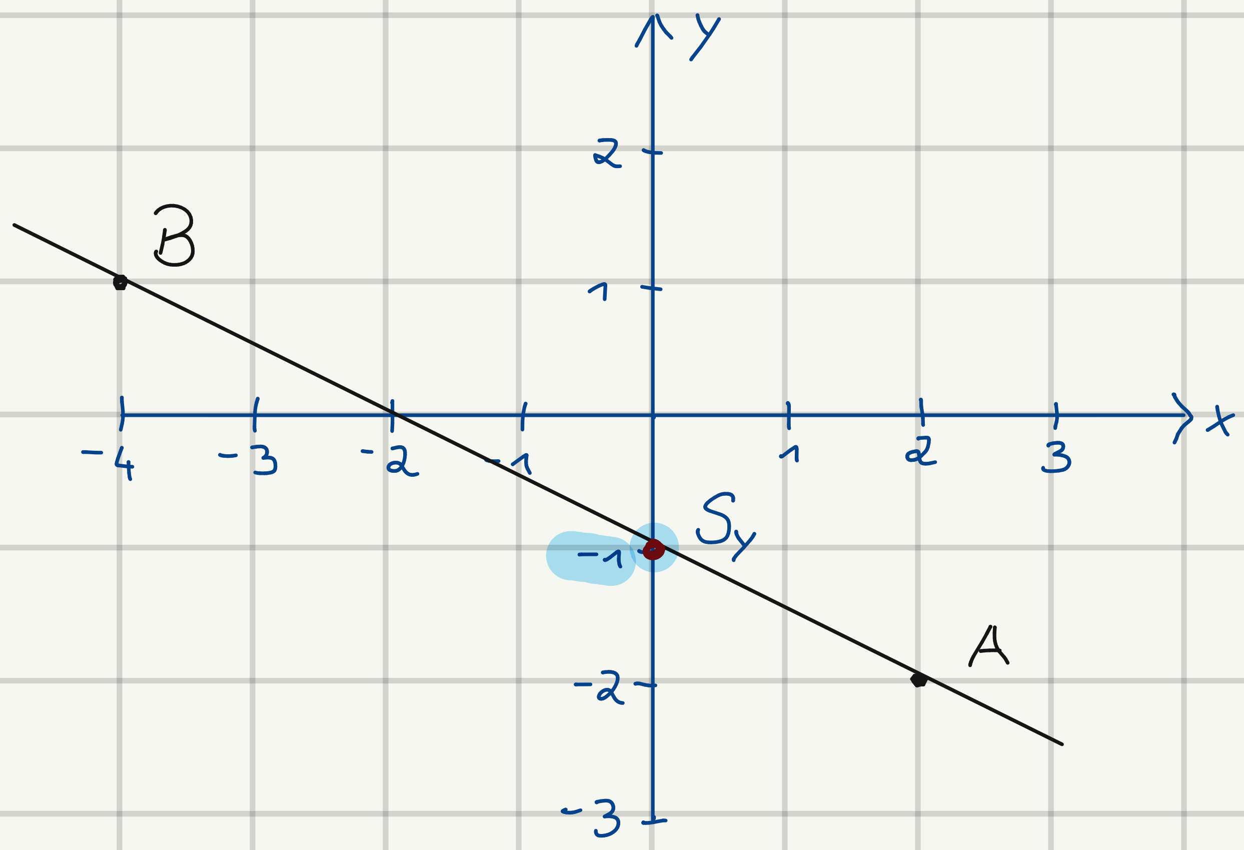




Und verbinden die Punkte zu einer Geraden.

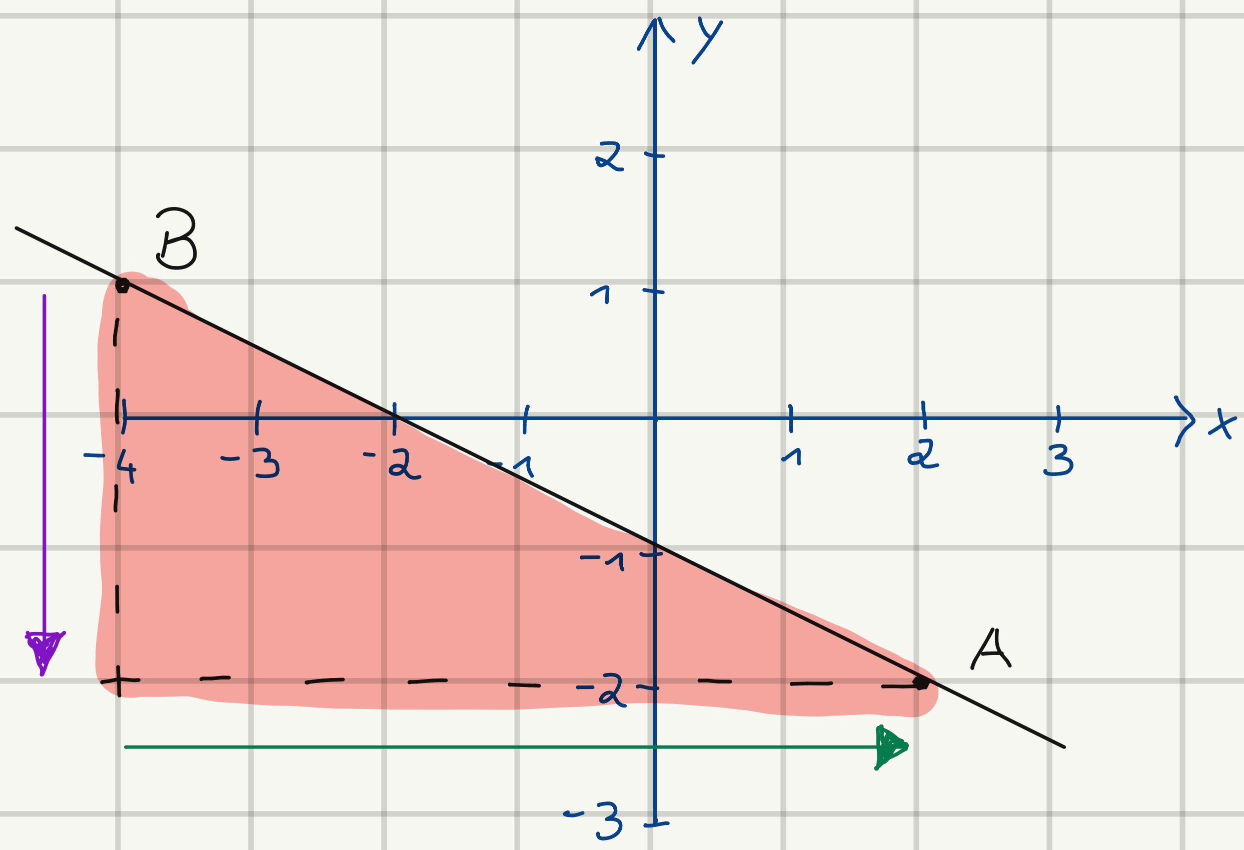
Bemerkung: Ist schon ein Koordinatensystem mit einer linearen Funktion gegeben, so können wir uns diese Schritte sparen.
Falls keine Punkte gegeben sind, können wir uns zwei beliebige auf der Geraden suchen.

Jetzt lesen wir ab, an welchem y-Wert die Gerade die y-Achse schneidet und erhalten n:



$\Rightarrow n = -1$ Also ist $f(x) = m \cdot x + n = m \cdot x - 1$

Als Nächstes wollen wir m bestimmen. Deshalb zeichnen wir das Anstiegsdreieck zwischen A und B ein:

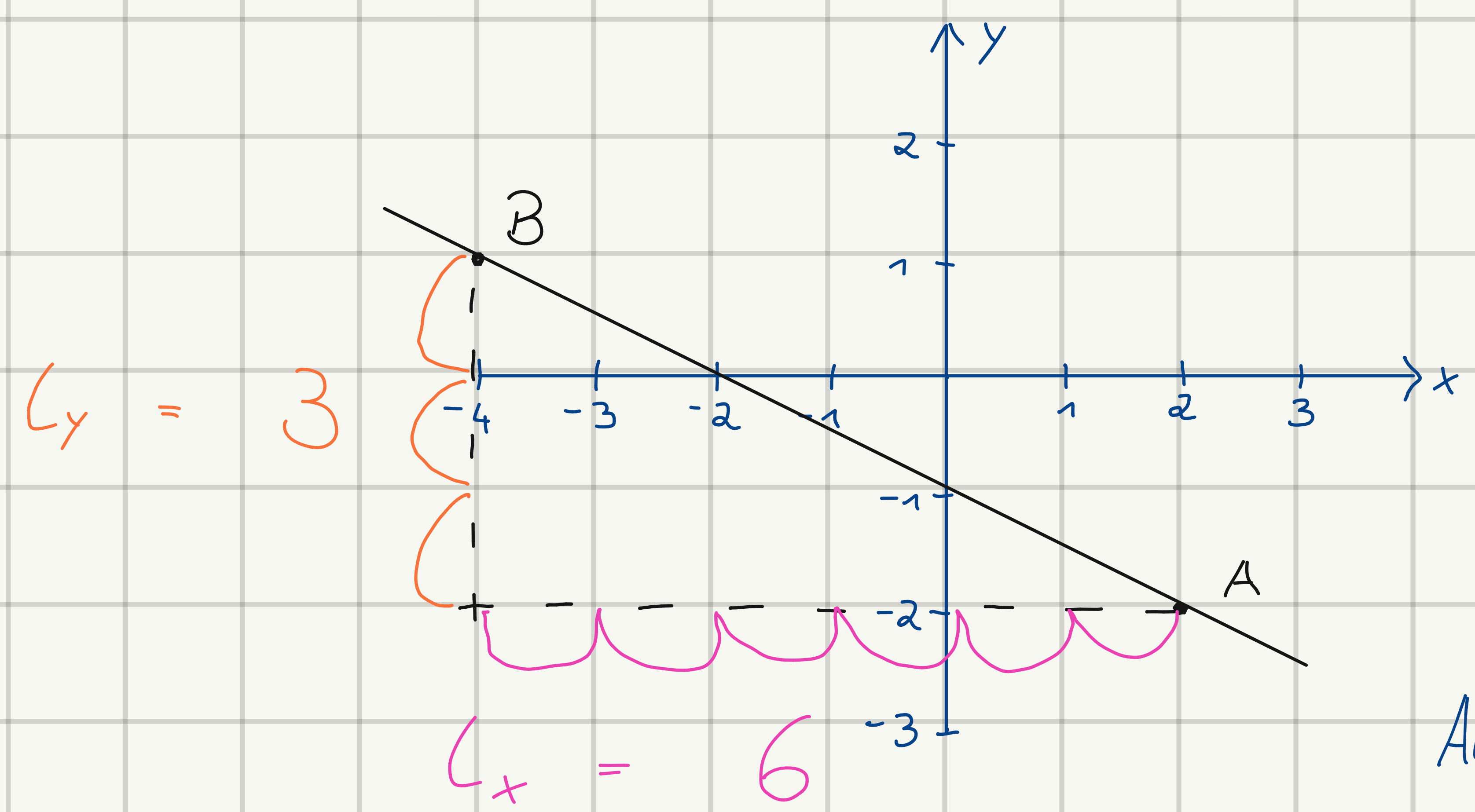


Beim zeichnen sind wir nach unten und dann nach rechts gegangen

$\Rightarrow$ also ist m negativ

$\Rightarrow$ das Vorzeichen ist $-$

Wir zählen die Längeneinheiten der Katheten des Dreiecks ab:



Also ist $|m| = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

! Wichtig: Wir dürfen jetzt nicht vergessen unser Vorzeichen anzuhängen:

Also ist $m = -\frac{1}{2}$

Somit erhalten wir die Funktionsgleichung:

$$f(x) = -\frac{1}{2}x - 1$$

Rechnerische / algebraische Bestimmung der Funktionsgleichung:

m: Gegeben sind 2 Punkte $P_1(x_1/y_1)$ und $P_2(x_2/y_2)$.

Dann gilt: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Wir müssen also nur die Koordinaten in die Gleichung einsetzen und erhalten m.

n: Wenn wir n nicht direkt aus einem Koordinatensystem ablesen können, schauen wir ob einer der gegebenen Punkte diese Form besitzt:

$$P_0(0/y_0)$$

Dann ist $n = y_0$ und wir sind fertig.

Bemerkung: Nicht verwechseln mit $P_0(x_0/0)$!!!
Das ist nicht der Schnittpunkt mit der y-Achse, es sei denn, $x_0 = 0$ => also $P_0(0/0)$!

Ist dies auch nicht der Fall, so ist es wichtig, dass wir m schon kennen. Dann wählen wir uns einen der Punkte $P_0(x_0/y_0)$ aus und setzen alles in folgende Gleichung ein:

$$y_0 = m \cdot x_0 + n$$

Damit ist n die einzige Variable in der Gleichung und wir stellen auf diese um:

$$n = y_0 - m \cdot x_0$$

Anacker

Beispiel von eben ohne Koordinatensystem:

Gegeben: $A(2\,|\,-2) = P_1(x_1\,|\,y_1)$

$B(-4\,|\,1) = \underbrace{P_2(x_2\,|\,y_2)}_{}$

schreibt euch das immer mit dazu, um nicht durcheinander zu kommen!

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \underbrace{\frac{1-(-2)}{-4-2} = \frac{1+2}{-4-2}}_{\text{Vorzeichen beachten}} = \frac{3}{-6} \overset{:3}{=} -\frac{1}{2}$$

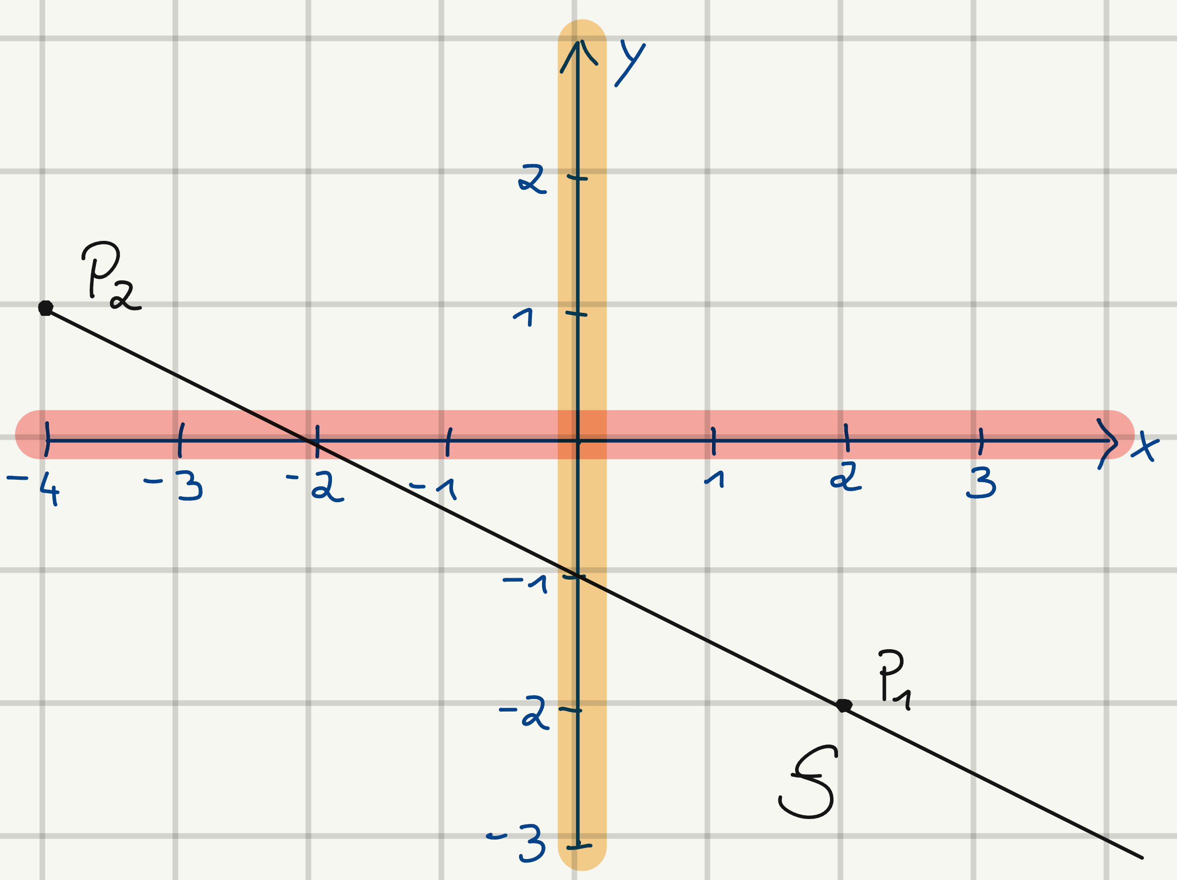
n: Meistens könnt ihr n aus einem Koordinatensystem ablesen, falls nicht:

$$\begin{aligned}
y &= m \cdot x + n \\
y_1 &= -\tfrac{1}{2} \cdot x_1 + n \\
-2 &= -\tfrac{1}{2} \cdot 2 + n \\
-2 &= -1 + n \qquad | +1 \\
-1 &= n \qquad | \curvearrowleft \\
n &= -1
\end{aligned}$$

wir wählen $P_1(x_1\,|\,y_1) = A(2\,|\,-2)$

$m = -\frac{1}{2}$

Bestimmung des Definitions- und Wertebereichs:



Der Definitionsbereich D ist eine Menge von x-Werten, für die die Funktion f definiert ist.

Der Wertebereich W ist eine Menge von y-Werten, für die die Funktion f definiert ist.

Übersichtsblatt Lineare Funktionen - Klasse 8

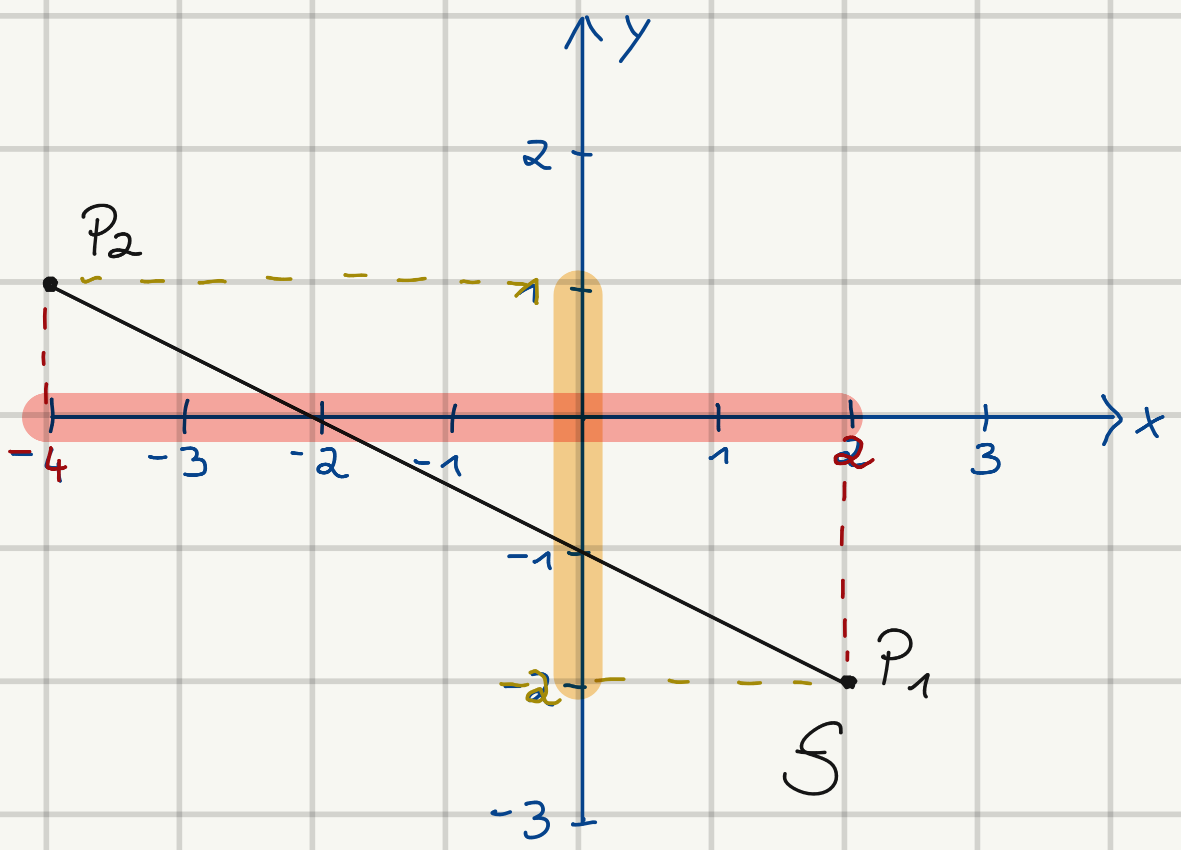
In der Regel gilt: In $\mathbb{D}$ sind alle Zahlen.
In $\mathbb{W}$ sind alle Zahlen.

mathematisch : $\mathbb{D}$ ist die Menge aller reellen Zahlen $\mathbb{R}$.
$\mathbb{W}$ ist die Menge aller reellen Zahlen $\mathbb{R}$.

kurz : $\mathbb{D} = \mathbb{R}$
$\mathbb{W} = \mathbb{R}$

Zwischen zwei Punkten $P_1(x_1|y_1)$ und $P_2(x_2|y_2)$ gilt:

Ist unsere Funktion f nur als Strecke zwischen zwei Punkten definiert, so kommen alle Punkte und deren Werte außerhalb dieser Strecke nicht mehr in Frage.



Dann sagen wir:

$\mathbb{D}$ sind erstmal alle reellen Zahlen, aber nur diejenigen x-Werte, welche zwischen P_1 und P_2 liegen, also alle x zwischen x_1 und x_2.
$\mathbb{W}$ sind erstmal alle reelle Zahlen, aber nur diejenigen y-Werte, welche zwischen P_1 und P_2 liegen, also alle y zwischen y_1 und y_2

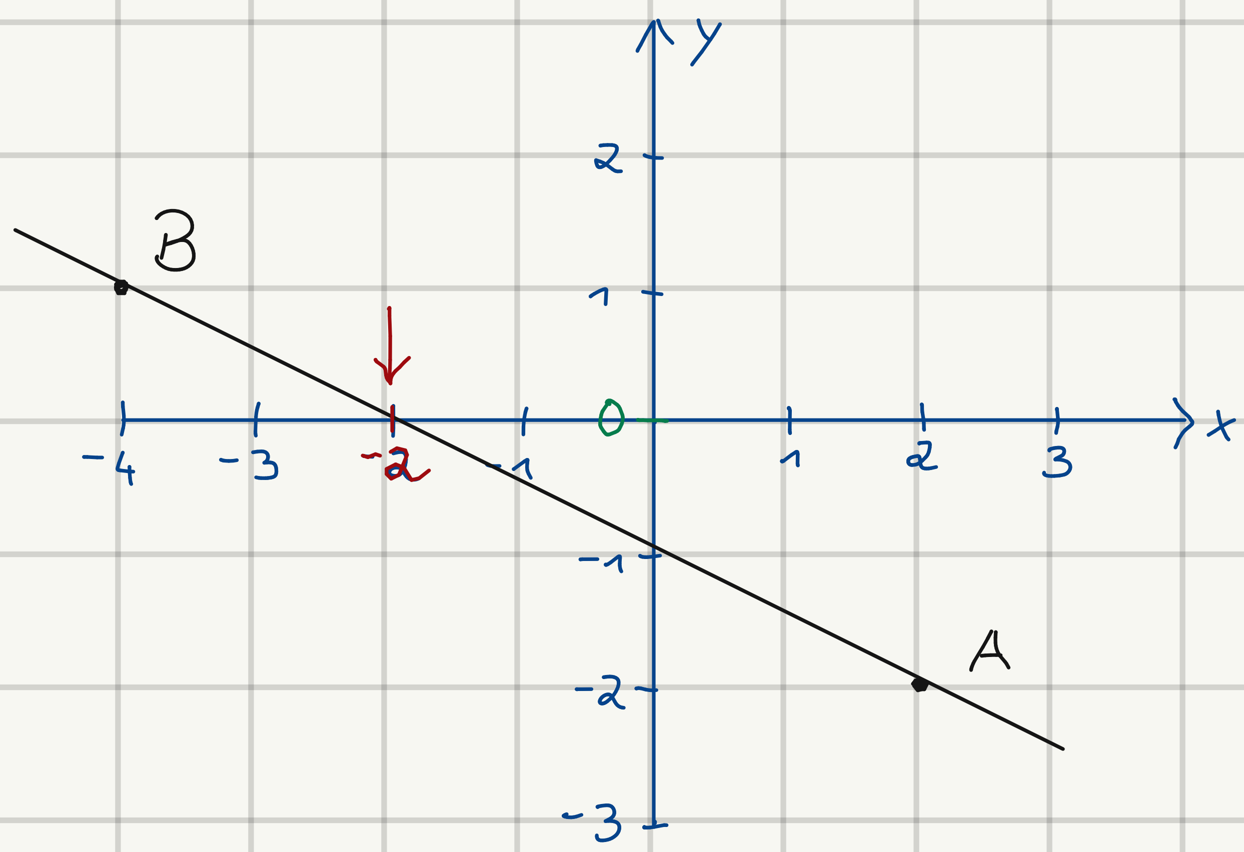
Also formal für unser Beispiel:

$$\mathbb{D} = \{ \mathbb{R} \text{ und } -4 \leq x \leq 2 \}$$
$$\mathbb{W} = \{ \mathbb{R} \text{ und } -2 \leq y \leq 1 \}$$

Man kann die Werte auch direkt aus den zwei Punkten lesen:
$P_1(x_1|y_1)$ und $P_2(x_2|y_2)$

Bestimmung der Nullstelle:

Als Nullstellen einer Funktion bezeichnet man die Schnittpunkte mit der x-Achse.



An dieser Stelle beträgt der y-Wert immer 0. Das können wir nutzen, um in einer fertigen Funktionsgleichung für y den Wert 0 einzusetzen und diese auf x umzustellen.

Beispiel: $y = f(x) = -\frac{1}{2}x - 1$

$$0 = -\frac{1}{2}x - 1 \quad | +1$$
$$1 = -\frac{1}{2}x \quad | \circlearrowright$$
$$-\frac{1}{2}x = 1 \quad | :\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$-\frac{1}{2} : \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot x = 1 : \left(-\frac{1}{2}\right) \quad |$$

Kehrwert, wenn wir durch einen Bruch dividieren (aber nur dann!)

$$-\frac{1}{\cancel{2}} \cdot \left(-\frac{\cancel{2}}{1}\right) \cdot x = 1 \cdot \left(-\frac{2}{1}\right)$$

Nullstelle: $x_0 = -2$

Schnittpunkt mit der x-Achse: $S_x(-2 \mid 0)$